

IT@CookBook, 기초 신호 및 시스템(2판)

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

제7장 라플라스 변환

[Quick Review]

※ 다음 문제에서 옳은 것을 골라라.

(1) 라플라스 변환은 푸리에 변환에 비해 더 (많은, 적은) 신호를 변환할 수 있다.

Ans) 많은

(2) 라플라스 변환은 모든 신호를 주파수 영역으로 변환할 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(3) (좌편향, 우편향) 신호는 수렴 영역이 $j\omega$ 축에 평행한 경계선의 오른쪽 평면이다.

Ans) 우편향

(4) 단방향 라플라스 변환은 (인과, 비인과) 신호를 대상으로 한다.

Ans) 인과

(5) 라플라스 변환의 수렴 영역이 $j\omega$ 축을 포함해야만 푸리에 변환이 존재한다. (○, ×)

Ans) ○

(6) 시간 미분 성질은 초기 조건과는 관련이 없다. (○, ×)

Ans) ×

(7) 임펄스 응답이 $h(t)$ 인 시스템의 입력 $x(t)$ 에 대한 출력 $y(t)$ 을 주파수 영역에서 나타내면 $Y(s) = H(s)X(s)$ 가 된다. (○, ×)

Ans) ○

(8) 최종값 정리는 (모든, 안정한) 신호에 대해 적용 가능하다.

Ans) 안정한

(9) 6차 $X(s)$ 가 3중극을 가지면 (4, 5, 6)개의 부분분수 항으로 전개된다.

Ans) 6

(10) $X(s)$ 가 3중극 $\{p_i\}$ 를 가지면 $x(t)$ 는 $(e^{p_i t}, te^{p_i t}, t^2 e^{p_i t}, t^3 e^{p_i t})$ 항을 포함한다.

Ans) $e^{p_i t}, te^{p_i t}, t^2 e^{p_i t}$

$t^n e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ 에 의해 $t^2 e^{p_i t}$ 항까지 포함하게 된다.

(11) 공역 복소극을 갖는 $X(s)$ 를 역변환하면 (실수, 복소수) 함수가 된다.

Ans) 실수

(12) 시스템의 전달 함수는 입력의 형태에 따라 달라질 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(13) 전달 함수는 (임펄스 응답, 미분 방정식, 특성 방정식)으로부터 구할 수 있다.

Ans) 임펄스 응답, 미분 방정식

(14) 시스템의 특성 방정식은 전달 함수의 (분모, 분자)=0인 방정식이다.

Ans) 분모

(15) 전달 함수에서 ($s = \sigma$, $s = j\omega$, $s = \sigma + j\omega$)로 두면 주파수 응답이 된다.

Ans) $s = j\omega$

(16) 두 시스템을 종속 연결한 시스템의 전달 함수는 각 전달 함수의 (합, 곱)과 같다.

Ans) 곱

(17) 임펄스 응답의 형태는 극의 위치에 따라 결정된다. (○, ×)

Ans) ○

(18) 시스템에 대한 입력의 연관 작용을 지배하는 것은 (극, 영점)이다.

Ans) 영점

(19) 전달 함수의 극과 시스템 미분 방정식의 특성근은 같다. (○, ×)

Ans) ○

(20) 시스템이 안정하려면 (극, 영점)이 s 평면의 (우반면, 좌반면)에 위치해야 한다.

Ans) 극, 좌반면

[기초 문제]

7.1 라플라스 변환의 정의식을 이용하여 다음 신호의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $x(t) = \delta(t) + \delta(t-2)$

Ans) $X(s) = 1 + e^{-2s}$

(b) $x(t) = u(t+3)$

Ans) $X(s) = \frac{1}{s}$

※단방향 라플라스 변환이기 때문에 $t < 0$ 에서의 신호 값은 무시된다.

(c) $x(t) = e^{-at}(u(t) - u(t-1))$

Ans) $X(s) = \frac{1}{s+a}(1 - e^{-(s+a)})$

(d) $x(t) = (1 - e^{-t})u(t-1)$

Ans) $X(s) = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s+1}e^{-(s+1)}$

(e) $x(t) = t^2u(t)$

Ans) $X(s) = \frac{2}{s^3}$

(f) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t-k)$

Ans) $X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-k)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-s}\right)^k = \frac{2}{2-e^{-s}}$

7.2 다음의 신호의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $x(t) = (t+1)u(t)$

Ans) $X(s) = \frac{s+1}{s^2}$

(b) $x(t) = (t+1)u(t+1)$

Ans) 단방향 라플라스 변환에서는 $x(t) = (t+1)u(t+1) = (t+1)u(t)$ 가 된다.

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

(c) $x(t) = tu(t-1)$

Ans) $x(t) = (t-1)u(t-1) + u(t-1)$

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2}e^{-s}$$

(d) $x(t) = (t-1)u(t)$

Ans) $X(s) = -\frac{s-1}{s^2}$

(e) $x(t) = (t-1)u(t-1)$

Ans) $X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}$

(f) $x(t) = 3(t-3)u(t-2)$

Ans) $x(t) = 3(t-2)u(t-2) - 3u(t-2)$

$$X(s) = 3 \frac{1-s}{s^2} e^{-2s}$$

7.3 라플라스 변환의 성질을 이용하여 다음 신호의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-a}{2a}\right)$

Ans) 시간 이동 성질 이용

$$X(s) = \frac{1 - e^{-2as}}{2}$$

(b) $x(t) = t^3 e^{-2t} u(t)$

Ans) 주파수 미분 성질 이용

$$X(s) = \frac{6}{(s+2)^4}$$

(c) $x(t) = t[u(t-1) - u(t-3)]$

Ans) 시간 이동 성질 이용

$$X(s) = \frac{1 - 3e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-s}(1 - e^{-2s})}{s^2}$$

(d) $x(t) = te^{-3t} \cos(2t) u(t)$

Ans) 변조(주파수 이동) 성질 이용

$$X(s) = \frac{1}{2((s-j2)+3)^2} + \frac{1}{2((s+j2)+3)^2} = \frac{(s+3)^2 - 2^2}{((s+3)^2 + 2^2)^2}$$

7.4 다음에 주어진 두 신호 $x(t)$ 와 $h(t)$ 의 컨벌루션 $y(t) = x(t) * h(t)$ 를 라플라스 변환을 이용하여 구하라.

(a) $x(t) = u(t)$, $h(t) = u(t)$

Ans) $Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$

$$y(t) = tu(t)$$

(b) $x(t) = \delta(t) + \delta(t-4)$, $h(t) = u(t)$

Ans) $Y(s) = (1 + e^{-4s}) \frac{1}{s}$

$$y(t) = u(t) + u(t-4)$$

(c) $x(t) = u(t)$, $h(t) = e^{-t} u(t)$

Ans) $Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s+1}$

$$y(t) = u(t) - e^{-t} u(t)$$

(d) $x(t) = e^{-t} u(t)$, $h(t) = e^{-2t} u(t)$

Ans) $Y(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+2}$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

7.5 신호 $x(t)$ 의 라플라스 변환이 다음과 같을 때, 신호의 초깃값과 최종값을 초깃값 정리와 최종값 정리를 사용하여 구하고, $X(s)$ 를 라플라스 역변환하여 $x(t)$ 를 구해 얻어진 값이 맞는지 확인하라.

(a) $X(s) = \frac{1}{s+a}$

Ans) $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+a} = 1$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+a} = 0$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \rightarrow x(0^+) = 1, \quad x(\infty) = 0$$

(b) $X(s) = \frac{s+3}{s+2}$

Ans) $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+3)}{s+2} = \infty$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+3)}{s+2} = 0$$

$$x(t) = \delta(t) + e^{-2t}u(t) \rightarrow x(0^+) = \infty, \quad x(\infty) = 0$$

(c) $X(s) = \frac{7s+10}{s(s+2)}$

Ans) $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(7s+10)}{s(s+2)} = 7$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(7s+10)}{s(s+2)} = 5$$

$$x(t) = (5 + 2e^{-2t})u(t) \rightarrow x(0^+) = 7, \quad x(\infty) = 5$$

(d) $X(s) = \frac{25}{s(s^2+25)}$

Ans) $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6s}{s(s^2+25)} = 0$

허축상에 불안정한 극($s = \pm j5$)을 가지므로 최종값 정리는 적용할 수 없다.

$$x(t) = (1 - \cos(5t))u(t) \rightarrow x(0^+) = 0$$

최종값은 $x(t)$ 가 정현파를 포함하므로 결정할 수 없다는 것을 알 수 있다.

(e) $X(s) = \frac{s}{s^2-2s-3}$

Ans) $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2-2s-3} = 1$

$s = 3$ 의 불안정한 극을 가지므로 최종값 정리는 적용할 수 없다.

$$x(t) = (\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t})u(t) \rightarrow x(0^+) = 1$$

(f) $X(s) = \frac{s-1}{s^2+2s-3}$

Ans) $X(s) = \frac{s-1}{s^2+2s-3} = \frac{1}{s+3} \rightarrow$ 불안정한 극($s = 1$)이 상쇄됨

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+3} = 1$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+3} = 0$$

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \rightarrow x(0^+) = 1, \quad x(\infty) = 0$$

(g) $X(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2}$

$$\text{Ans)} \quad x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+2)}{s(s+1)^2} = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+2)}{s(s+1)^2} = 2$$

$$x(t) = (2 - 2e^{-t} - te^{-t})u(t) \quad \rightarrow \quad x(0) = 0, \quad x(\infty) = 2$$

따라서 $t=0$ 과 $t=\infty$ 를 대입하면 다음과 같이 신호 $x(t)$ 의 초깃값과 최종값이 구해진다.

$$(h) \quad X(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\text{Ans)} \quad x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s^2 + 2s)}{s^2(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s^2 + 2s)}{s^2(s^2 + 2s + 2)} = 1$$

$$x(t) = (1 - e^{-t} \cos t)u(t) \quad \rightarrow \quad x(0) = 0, \quad x(\infty) = 0$$

7.6 다음과 같은 $X(s)$ 의 라플라스 역변환을 구하라.

$$(a) \quad X(s) = \frac{3}{s(s+3)}$$

$$x(t) = (1 - e^{-3t})u(t)$$

$$(b) \quad X(s) = \frac{4s+2}{s^2+6s+8}$$

$$\text{Ans)} \quad X(s) = -\frac{3}{s+2} + \frac{7}{s+4}$$

$$x(t) = (-3e^{-2t} + 7e^{-4t})u(t)$$

$$(c) \quad X(s) = \frac{s^2+s}{s^2+3s+2}$$

$$\text{Ans)} \quad X(s) = \frac{s}{s+2} = 1 - \frac{2}{s+2}$$

$$x(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

$$(d) \quad X(s) = \frac{s^2}{s^2+3s+2}$$

$$\text{Ans)} \quad X(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{4}{s+2}$$

$$x(t) = \delta(t) + (e^{-t} - 4e^{-2t})u(t)$$

$$(e) \quad X(s) = \frac{8}{s^2(s+2)}$$

$$\text{Ans)} \quad X(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+2}$$

$$x(t) = (4t - 2 + 2e^{-2t})u(t)$$

$$(f) \quad X(s) = \frac{5s-1}{s^3-3s-2}$$

$$\text{Ans)} \quad X(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

$$x(t) = e^{2t}u(t) + 2te^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) = (e^{2t} + (2t-1)e^{-t})u(t)$$

7.7 다음 미분 방정식으로 표현된 LTI 시스템의 출력을 라플라스 변환을 이용하여 구하라.

$$(a) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad x(t) = u(t), \quad y(0^-) = 2, \quad \dot{y}(0^-) = -3$$

$$\text{Ans)} Y(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1}$$

$$y(t) = 2e^{-t}u(t)$$

극-영점 상쇄에 의해 시스템 모드 중에서 e^{-2t} 는 나타나지 않고, 강제 응답은 0이다.

$$(b) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad x(t) = e^{-t}u(t), \quad y(0^-) = 1, \quad \dot{y}(0^-) = 1$$

$$\text{Ans)} Y(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \left[\frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2} \right] + \left[-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2} \right]$$

$$y(t) = (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) + (-e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t})u(t) = (2e^{-t} + te^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$(c) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t), \quad x(t) = e^{-t}u(t), \quad y(0^-) = 2, \quad \dot{y}(0^-) = 1$$

$$\text{Ans)} Y(s) = \frac{2s+9}{(s+2)^2} + \frac{s+1}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{2}{s+2} + \frac{6}{(s+2)^2}$$

$$y(t) = (2+6t)e^{-2t}u(t)$$

$$(d) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t), \quad x(t) = e^{-t}u(t), \quad y(0^-) = 1, \quad \dot{y}(0^-) = 1$$

$$\text{Ans)} Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} + \frac{s+3}{(s+1)^3} = \left[\frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \right] + \left[\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3} \right]$$

$$y(t) = (e^{-t} + 2te^{-t})u(t) + (te^{-t} + t^2e^{-t})u(t) = (e^{-t} + 3te^{-t} + t^2e^{-t})u(t)$$

7.8 다음 미분 방정식으로 표현된 LTI 시스템에 대해 전달 함수와 임펄스 응답을 구하라.

$$(a) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2x(t)$$

$$\text{Ans)} \text{전달 함수 : } H(s) = \frac{2}{s^2+5s+4} = \frac{2}{(s+1)(s+4)}$$

$$\text{임펄스 응답 : } h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \right)u(t)$$

$$(b) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} + 6x(t)$$

$$\text{Ans)} \text{전달 함수 : } H(s) = \frac{2s+6}{s^2+5s+4} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+4)}$$

$$\text{임펄스 응답 : } h(t) = \left(\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \right)u(t)$$

$$(c) \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$$

$$\text{Ans)} \text{전달 함수 : } H(s) = \frac{2}{s^3+3s^2+4s+2} = \frac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$\text{임펄스 응답 : } h(t) = 2(e^{-t} - e^{-t} \cos t)u(t)$$

$$(d) \frac{d^3 y(t)}{dt^3} - \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} - 6x(t)$$

Ans) 전달 함수 : $H(s) = \frac{2s-6}{s^3-s^2+2} = \frac{2(s-3)}{(s+1)(s^2-2s+2)}$

임펄스 응답 : $h(t) = (-\frac{8}{5}e^{-t} + \frac{8}{5}e^t \cos t - \frac{6}{5}e^t \sin t)u(t) = (-\frac{8}{5}e^{-t} + 2e^t \cos(t+\phi))u(t), \quad \phi = \tan^{-1} \frac{3}{4}$

7.9 시스템의 입력과 출력이 다음과 같을 때 전달 함수와 임펄스 응답, 시스템 표현 미분 방정식을 구하라.

(a) $x(t) = e^{-3t}u(t), \quad y(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$

Ans) (1) 전달 함수

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{2}{(s+1)(s+3)}}{\frac{1}{s+3}} = \frac{2}{s+1}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

(3) 미분 방정식

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)$$

(b) $x(t) = e^{-t}u(t), \quad y(t) = (e^{-2t} + te^{-t})u(t)$

Ans) (1) 전달 함수

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2(s+2)}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s^2+3s+3}{s^2+3s+2}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t) = \delta(t) + (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

(3) 미분 방정식

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

(c) $x(t) = u(t), \quad y(t) = e^{-3t}u(t) - tu(t)$

Ans) (1) 전달 함수

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2-s-3}{s(s+3)}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1 - \frac{1}{s} - \frac{3}{s+3}\} = \delta(t) - (1 + 3e^{-3t})u(t)$$

(3) 미분 방정식

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t)}{dt} - 3x(t)$$

(d) $x(t) = tu(t), \quad y(t) = e^{-t}u(t) + (t-1)u(t)$

Ans) (1) 전달 함수

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s^2(s+1)}}{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s+1}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

(3) 미분 방정식

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

7.10 전달 함수가 다음과 같은 시스템의 안정도를 판별하라.

(a) $H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$

Ans) $\Delta(s) = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3) = 0 \rightarrow s = -2, -3$
시스템은 안정

(b) $H(s) = \frac{s-2}{s^2-3s+2}$

Ans) $\Delta(s) = s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2) = 0 \rightarrow s = 1, 2$
시스템은 불안정

(c) $H(s) = \frac{s+3}{s^2-2s+5}$

Ans) $\Delta(s) = s^2 - 2s + 5 = 0 \rightarrow s = 1 \pm j2$
시스템은 불안정

(d) $H(s) = \frac{s-1}{s^2+s-2}$

Ans) $H(s) = \frac{s-1}{s^2+s-2} = \frac{s-1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s+2}$
 $\Delta(s) = s+2 = 0 \rightarrow s = -2$
시스템은 안정

(e) $H(s) = \frac{s+2}{s^2+s}$

Ans) $\Delta(s) = s^2 + s = s(s+1) = 0 \rightarrow s = 0, -1$
시스템은 불안정

(f) $H(s) = \frac{2}{s^2+4}$

Ans) $\Delta(s) = s^2 + 4 = 0 \rightarrow s = \pm j2$
시스템은 임계 안정(불안정)

(g) $H(s) = \frac{s}{s^2+4s+4}$

Ans) $\Delta(s) = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2 = 0 \rightarrow s = -2, -2$
시스템은 안정

(h) $H(s) = \frac{4(s+2)}{s^2+4s+13}$

Ans) $\Delta(s) = s^2 + 4s + 13 = 0 \rightarrow s = -2 \pm j3$
시스템은 안정

[응용 문제]

7.11 다음 신호의 양방향 라플라스 변환과 수렴 영역을 구하라.

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t) - e^t u(t)$

Ans) $X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} = -\frac{3}{s^2+s-2}$

수렴 영역 : $\sigma = \operatorname{Re}\{s\} > -2 \cap \sigma = \operatorname{Re}\{s\} > 1 \rightarrow \therefore \sigma = \operatorname{Re}\{s\} > 1$

(b) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^t u(-t)$

Ans) $X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} = -\frac{3}{s^2+s-2}$

수렴 영역 : $\sigma = \operatorname{Re}\{s\} > -2 \cap \sigma = \operatorname{Re}\{s\} < 1 \rightarrow \therefore -2 < \sigma = \operatorname{Re}\{s\} < 1$

(c) $x(t) = e^t u(-t) - e^{-2t} u(-t)$

Ans) $X(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} = -\frac{3}{s^2+s-2}$

수렴 영역 : $\sigma = \operatorname{Re}\{s\} < 1 \cap \sigma = \operatorname{Re}\{s\} < -2 \rightarrow \therefore \sigma = \operatorname{Re}\{s\} < -2$

(d) $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(-t)$

Ans) $X(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} = -\frac{3}{s^2+s-2}$

수렴 영역 : $\sigma = \operatorname{Re}\{s\} > 1 \cap \sigma = \operatorname{Re}\{s\} < -2 \rightarrow$ 겹치는 구간이 존재하지 않음

$\therefore$ 라플라스 변환이 존재하지 않음. 즉 $X(s)$ 는 $x(t)$ 의 라플라스 변환이 아님.

(e) $x(t) = e^{2|t|}$

Ans) $X(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-2}$

수렴 영역 : $\sigma < -2 \cap \sigma > 2 \rightarrow$ 수렴 영역이 존재하지 않으므로 라플라스 변환은 존재하지 않음.

(f) $x(t) = e^{-2|t|}$

Ans) $X(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} = \frac{4}{4-s^2}$

7.12 다음 신호의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $x_1(t) = e^{-(t+2)}u(t+2)$

Ans) (단방향) 라플라스 변환은 $t \geq 0$ 의 구간의 신호 값만 변환에 포함

$$X_1(s) = e^{-2} \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt = \frac{e^{-2}}{s+1}$$

(b) $x_2(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$

Ans) 시간 이동 성질에 의해

$$X_2(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

(c) $x_3(t) = e^{-t}u(t-2)$

Ans) 시간 이동 성질에 의해

$$X_3(s) = e^{-2} \frac{e^{-2s}}{s+1} = \frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}$$

(d) $x_4(t) = e^{-(t-2)}u(t)$

Ans) $x_4(t) = e^2 e^{-t}u(t)$

$$X_4(s) = \frac{e^2}{s+1}$$

7.13 라플라스 변환의 성질을 이용하여 다음 신호에 대해 다른 두 가지 방법으로 라플라스 변환을 구하라.

(a) $x(t) = te^{-2t}u(t)$

Ans)

(1) 주파수 이동 성질 이용

$$v(t) = tu(t) \rightarrow \therefore X(s) = V(s+2) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

(2) 주파수 미분 성질 이용

$$v(t) = e^{-2t}u(t) \rightarrow \therefore X(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+2)}\right) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

(b) $x(t) = \sin^2(\omega_0 t)u(t)$

Ans)

(1) 시간 미분 성질 이용

$$\mathcal{L}\{\omega_0 \sin(2\omega_0 t)\} = \frac{2\omega_0^2}{s^2 + 4\omega_0^2} = sX(s) - x(0) \rightarrow \therefore X(s) = \frac{2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)}$$

(2) 변조(주파수 이동) 성질 이용

$$s(t) = \sin(\omega_0 t)u(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{j2}(S(s-j\omega_0) - S(s+j\omega_0)) = \frac{2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)}$$

7.14 $X(s) = \frac{2s}{s^2 + 4}$ 일 때 다음 신호의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $y(t) = x(3t)$

Ans) 시간 척도조절 성질에 의해

$$Y(s) = \frac{1}{3}X\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{2s}{s^2 + 6^2}$$

(b) $y(t) = x(t-2)$

Ans) 시간 이동 성질에 의해

$$Y(s) = X(s)e^{-2s} = \frac{2s}{s^2 + 4}e^{-2s}$$

(c) $y(t) = e^{-t}x(t)$

Ans) 주파수 이동 성질에 의해

$$Y(s) = X(s+1) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 4}$$

(d) $y(t) = 2tx(t)$

Ans) 주파수 미분 성질에 의해

$$Y(s) = -\frac{dX(s)}{ds} = \frac{2(s^2 - 4)}{(s^2 + 4)^2}$$

$$(e) \quad y(t) = x(t) * \frac{dx(t)}{dt}$$

Ans) 시간 컨벌루션 및 시간 미분 성질에 의해

$$Y(s) = X(s)(sX(s) - x(0))$$

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2}{s^2 + 4} = 2$$

$$Y(s) = X(s)(sX(s) - x(0)) = -\frac{16s}{(s^2 + 4)^2}$$

$$(f) \quad y(t) = \int_0^t x(3\tau) d\tau$$

Ans) $v(t) = x(3t)$ 라 두면, 시간 척도조절 및 시간 적분 성질에 의해

$$V(s) = \frac{1}{3} X\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{2s}{s^2 + 6^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} V(s) = \frac{2}{s^2 + 6^2}$$

7.15 인과 주기 신호의 라플라스 변환은 첫 번째 주기의 라플라스 변환을 알면 구해진다.

(a) 신호 $x(t)$ 의 첫 번째 주기만 떼어낸 신호를 $\hat{x}(t)$ 라고 하고 이의 라플라스 변환을 $\hat{X}(s)$ 라고 하면

$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \hat{X}(s) \text{가 됨을 보여라.}$$

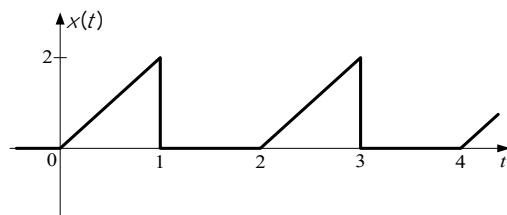
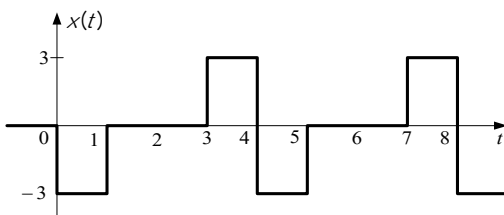
Ans) 한 주기 파형을 $\hat{x}(t)$ 라고 할 때

$$x(t) = \hat{x}(t) + \hat{x}(t - T) + \hat{x}(t - 2T) + \dots + \hat{x}(t - nT) + \dots$$

$$X(s) = \hat{X}(s) + \hat{X}(s)e^{-Ts} + \hat{X}(s)e^{-2Ts} + \dots + \hat{X}(s)e^{-nTs} + \dots$$

$$\therefore X(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \hat{X}(s)$$

(b) 다음 그림의 인과 주기 신호에 대한 라플라스 변환을 구하라.



Ans)

$$(a) \quad \hat{X}(s) = \frac{3}{s}(e^{-s} - 1) - \frac{3}{s}(e^{-4s} - e^{-3s})$$

$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \hat{X}(s) = \frac{3}{s(1 - e^{-4s})}(e^{-s} + e^{-3s} - e^{-4s} - 1)$$

$$(b) \quad \hat{X}(s) = -\frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{2}{s^2} = \frac{2}{s}\left(\frac{1}{s}(1 - e^{-s}) - e^{-s}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \hat{X}(s) = \frac{2}{s(1 - e^{-2s})}\left(\frac{1}{s}(1 - e^{-s}) - e^{-s}\right) = \frac{2}{s^2(1 + e^{-s})} - \frac{2e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}$$

7.16 다음과 같은 $X(s)$ 의 라플라스 역변환을 구하라.

$$(a) X(s) = \frac{2s^2 + 9s + 11}{s^2 + 4s + 4}$$

$$\text{Ans)} X(s) = 2 + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = 2\delta(t) + (te^{-2t} + e^{-2t})u(t) = 2\delta(t) + (t+1)e^{-2t}u(t)$$

$$(b) X(s) = \frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3}$$

$$\text{Ans)} X(s) = -\frac{2}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{6}{(s+2)^3} + \frac{2}{s+1}$$

$$x(t) = ((3t^2 - 2t - 2)e^{-2t} + 2e^{-t})u(t)$$

$$(c) \frac{s^2+8}{s(s^2+16)}$$

$$\text{Ans)} X(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+4^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4t))u(t) = \sin^2(2t)u(t)$$

$$(d) X(s) = \frac{3(s+1)}{s^2+4s+5}$$

$$\text{Ans)} X(s) = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+1^2} - \frac{3 \cdot 1}{(s+2)^2+1^2}$$

$$x(t) = (3e^{-2t}\cos(t) - 3e^{-2t}\sin(t))u(t) = 3e^{-2t}(\cos(t) - \sin(t))u(t)$$

$$\cos(t) - \sin(t) = \sqrt{1^2+1^2}(\cos(t)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(t)\sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}\cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$\therefore x(t) = \sqrt{2}e^{-2t}\cos(t + \frac{\pi}{4})u(t)$$

$$(e) X(s) = \frac{(s+2)e^{-2s}}{s^2-s-2}$$

$$\text{Ans)} X'(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{s+1} + \frac{\frac{4}{3}}{s-2}$$

$$x'(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$$

$$\therefore x(t) = (-\frac{1}{3}e^{-(t-2)} + \frac{4}{3}e^{2(t-2)})u(t-2)$$

$$(f) X(s) = \frac{3se^{-2s}}{s^2+2s+1}$$

$$\text{Ans)} X'(s) = \frac{3s}{s^2+2s+1} = \frac{-3}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+1}$$

$$x'(t) = -3(t-1)e^{-t}u(t)$$

$$\therefore x(t) = -3(t-3)e^{-(t-2)}u(t-2)$$

7.17 임펄스 응답 $h(t) = e^{-t}u(t)$ 인 LTI 시스템에서 다음의 입력 $x(t)$ 에 대한 출력을 라플라스 변환을 이용해 구하라.

(a) $x(t) = 2e^{-3t}u(t)$

Ans) $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$

$y(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$

(b) $x(t) = e^{-t}u(t)$

Ans) $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

$y(t) = te^{-t}u(t)$

(d) $x(t) = tu(t)$

Ans) $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$

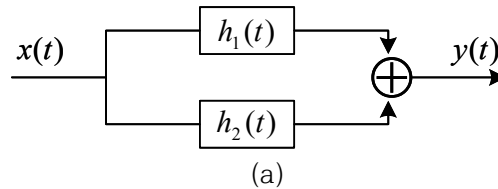
$y(t) = e^{-t}u(t) + (t-1)u(t)$

(e) $x(t) = 2\cos(t)u(t)$

Ans) $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2s}{(s+1)(s^2+1)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1}$

$y(t) = -e^{-t}u(t) + (\cos(t) + \sin(t))u(t) = -e^{-t}u(t) + \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})u(t)$

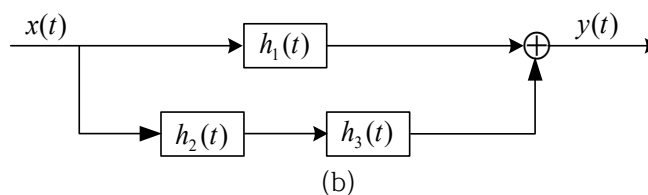
7.18 다음 그림의 LTI 시스템에 대해 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라.



(a) $h_1(t) = te^{-2t}u(t), h_2(t) = 2e^{-2t}u(t)$

Ans) $H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+2} = \frac{2s+5}{(s+2)^2}$

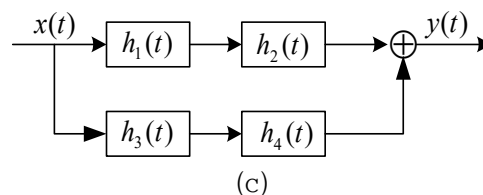
$h(t) = te^{-2t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$



(b) $h_1(t) = e^{-3t}u(t), h_2(t) = e^{-2t}u(t), h_3(t) = \delta(t-1)$

Ans) $H(s) = H_1(s) + H_2(s)H_3(s) = \frac{1}{(s+3)} + \frac{1}{s+2}e^{-s} = \frac{(s+2) + (s+3)e^{-s}}{(s+2)(s+3)}$

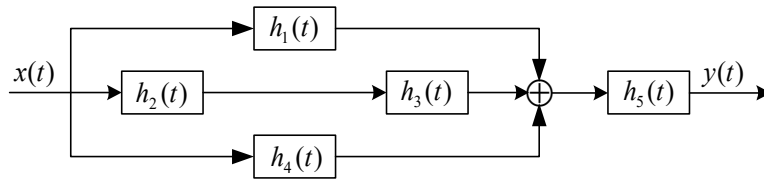
$h(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-2(t-1)}u(t-1)$



(c) $h_1(t) = e^{-2t}u(t)$, $h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$, $h_3(t) = e^{-3t}u(t)$, $h_4(t) = 4\delta(t)$

Ans) $H(s) = H_1(s)H_2(s) + H_3(s)H_4(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} + \frac{4}{s+3}$

$h(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$



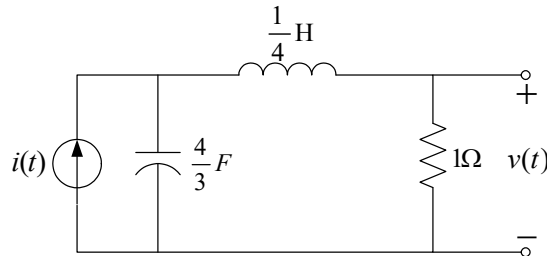
(d)

(d) $h_1(t) = e^{-2t}u(t)$, $h_2(t) = e^{-2t}u(t)$, $h_3(t) = e^{-t}u(t)$, $h_4(t) = \delta(t)$, $h_5(t) = e^{-3t}u(t)$

Ans) $H(s) = (H_1(s) + H_2(s)H_3(s) + H_4(s))H_5(s) = (\frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + 1)\frac{1}{s+3} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3})$

$h(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$

7.19 다음과 같은 전기회로에 대해 물음에 답하라.



(a) 입력 $i(t)$ 와 출력 $v(t)$ 의 관계를 나타내는 회로 방정식(미분 방정식)을 세워 전달 함수를 구하라.

Ans) 회로 방정식은

$$\frac{LC}{R} \frac{d^2v(t)}{dt^2} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R} v(t) = i(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4 \frac{dv(t)}{dt} + 3v(t) = 3i(t)$$

전달 함수

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$$

(b) $i(t) = u(t)$ 이고 $t < 0$ 에서 모든 초기 조건이 0일 때, 출력 전압 $v(t)$ 를 구하라.

Ans) $V(s) = H(s)I(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3}$

$v(t) = (1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$

7.20 다음의 각 항에 나타난 성질을 만족하는 2차 시스템의 전달 함수 $H(s)$ 하나를 예로 들고 극과 영점을 나타내라.

(a) 시스템이 안정하다.

Ans) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

극 : $s = -1, -2$

(b) 시스템이 불안정하다.

$$\text{Ans)} H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

$$\text{극} : s = 1, -2$$

(c) 시스템의 임펄스 응답이 지수 감쇠 정현파이다.

$$\text{Ans)} H(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\text{극} : s = -1 \pm j1$$

(d) 시스템의 임펄스 응답이 순수 진동 정현파이다.

$$\text{Ans)} H(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\text{극} : s = \pm j2$$

$$\text{영점} : s = 0$$

(e) 시스템의 주파수 응답이 아주 높은 주파수에서는 거의 0으로 접근한다.

$$\text{Ans)} H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{극} : s = -1, -2$$

(f) 시스템의 주파수 응답이 아주 높은 주파수에서 거의 1로 접근한다.

$$\text{Ans)} H(s) = \frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{극} : s = -1, -2$$

$$\text{영점} : s = 0, -3$$